

X Samenvatting

Hoofdstuk 1

Twee kanten van kennis.

Dit proefschrift geeft een beschrijving van de kennis die doorsnee mensen hebben van de getallen 1 tot en met 100. Deze getallen worden op hun psychologische eigenschappen onderzocht in een reeks experimenten.

In hoofdstuk 1 wordt uiteengezet dat menselijke kennis ontstaat door de samenwerking van twee verschillende systemen. Aan de ene kant is er het biologische systeem, met zijn miljarden neuronen, die slechts reageren op elkaars signalen en geen weet hebben van de betekenissen die hun acties in de omgang van mensen met hun omgeving vertegenwoordigen. Aan de andere kant is er de buitenwereld met zijn feiten, eisen en betekenissen, die richting geven aan de acties van het brein.

Het brein leert niet alles even goed of makkelijk. Kennis heeft daardoor altijd twee dimensies. De eerste is die van de betekenissen, zoals vastgelegd in taal en tekensystemen. De tweede is die van 'mate waarin', zoals bepaald door het brein. Onderzoek naar kennis heeft altijd met beide aspecten te maken. Het gaat er niet alleen om wat iemand weet, maar ook hoe makkelijk die kennis beschikbaar is.

Getallen hebben een aantal eigenschappen die behulpzaam kunnen zijn bij het in kaart brengen van deze twee dimensies. Getallen zijn - op het niveau van het eenvoudige rekenen - duidelijk gedefinieerd. Het getal 4 is groter dan 3, en het verschil is 1. Ook de relaties tussen getallen zijn op dat niveau eenvoudig te beschrijven. Het getal 8 is het dubbele van 4, en 9 is de wortel van 81. Die regels gelden voor iedereen. Door deze eigenschappen is de dimensie van het 'wat' bij getallen makkelijker in kaart te brengen dan bij de meeste woorden. Bovendien zijn er aanwijzingen dat de dimensie 'mate waarin' getallen gekend worden sterk verband houdt met hun grootte. De bekendste voorbeelden komen uit onderzoek naar rekenen. Zelfs voor eenvoudige sommen waarover nauwelijks hoeft te worden nagedacht, zoals de optellingen van eencijferige getallen, wordt altijd zo'n grootte-effect gevonden. De som $5 + 4$ geeft een langere reactietijd dan $3 + 2$. Er zijn echter redenen om aan te nemen dat het grootte-effect zich niet tot rekentijden beperkt. Zo is gebleken dat mensen kleinere getallen meer individuele ruimte toekennen op de getallenlijn dan grote. En kleine getallen werden in een ander onderzoek als meer 'typisch even', c.q. 'typisch oneven', aangemerkt dan grote

Hoewel er veel onderzoek naar de verwerking van getalsinformatie is gedaan is nooit eerder een vaste groep getallen voorwerp van systematisch onderzoek geweest. Dat gebeurt nu in dit proefschrift. Aan de hand van een verscheidene experimenten wordt onderzocht welke invloed objectieve eigenschappen van getallen, zoals bijvoorbeeld grootte en deelbaarheid, hebben op hun subjectieve verschijningsvormen.

Hoofdstuk 2

Frequentie en betekenis

In hoofdstuk 2 worden de getallen vergeleken op twee maten. Deze eerste is *meaningfulness*, dat wil zeggen betekenisvolheid, kortweg aangeduid als *m*. De tweede maat is associatieve frequentie. Deze twee maten worden bepaald door middel van voortgezette associatie. De taak van de proefpersonen was om bij elk gegeven getal zoveel mogelijk getallen op te schrijven waaraan het stimulus getal hen deed denken. Voor elk stimulus getal kan zo een *m*-score, staande voor het gemiddelde aantal associaties per proefpersoon, worden bepaald. Tevens kan voor elk getal de worden bepaald hoe vaak het gemiddeld als respons voorkomt. Die laatste maat geeft de associatieve frequentie. Om een vergelijking te kunnen maken werden de getallen ingedeeld in twee hoofdgroepen: tafelgetallen en niet-tafelgetallen. De tafelgetallen bevatten alle getallen 1 tot en met 12 en hun veelvoud. Bij elkaar zijn dat er 53 van de 100. De overige 47 zijn de niet-tafelgetallen.

Tafelgetallen bleken significant meer associaties op te roepen dan niet-tafelgetallen. De gemiddelde *m*-scores zijn 8,4 en 7,7. Het hoogste scoren de getallen 12 en 50, het laagste scoren 67 en 76. De verschillen in respons frequentie waren veel groter. Tafelgetallen hadden een gemiddelde respons frequentie van 10, en niet-tafelgetallen van 2,8. Binnen de hoofdgroep van tafelgetallen waren de verschillen ook zeer groot. Verreweg het hoogste scoorden de eencijferige getallen, met een gemiddelde frequentie van 23. Het aantal associaties dat deze getallen gemiddeld als stimulus opriepen was niet bijzonder hoog (een *m*-score van 8,4). Hieruit blijkt dat de associatief opgeroepen relaties tussen de getallen sterk asymmetrisch zijn.

Voor een deel van de getallen zijn ook algemene taalfrequentie scores beschikbaar. Deze blijken sterk (meer dan .80) te correleren met de door ons bepaalde associatieve respons frequenties. De correlatie tussen associatieve respons frequentie en objectieve grootte is -.65. Voor elk getal werd bekeken welke respons het vaakst werd gegeven. Vervolgens werden deze combinaties gecategoriseerd. Veelvoud-deler combinaties (b.v. 64-8) kwamen het vaakst voor.

Tenslotte werd een vergelijking gemaakt met de associatieve frequentie van woorden. In een associatie studie van Annette de Groot (1981), waarin 400 stimulus woorden waren betrokken, waren de respons frequenties ook zeer ongelijk. Het meest voorkomen respons woord was water, gevolgd door eten. Dit zou erop kunnen duiden dat de frequentie maat begrippen ordent naar de mate waarin zijn in het menselijk leven van belang zijn.

Hoofdstuk 3

De richting van associaties

In dit hoofdstuk worden de getallen opnieuw aan een associatie test onderworpen, ditmaal een enkelvoudige. Nu moeten proefpersonen zo snel mogelijk bij elk stimulusgetal één associatie geven. De vragen die centraal staan hebben beide betrekking op de psychologische structuur van getalsrelaties. In hoofdstuk 2 vonden we aanwijzingen dat deze relaties een bepaalde asymmetrie vertonen: stimulus-respons combinaties zijn niet zomaar omkeerbaar. Er leek bovendien systeem in deze asymmetrie te zitten, in die zin dat eencijferige getallen en tientallen buitenproportioneel vaak als respons werden gegeven, terwijl zij als stimulus niet bijzonder veel meer associaties opriepen dan andere getallen. Dit herinnert aan onderzoek van Rosch (1975), die onderscheid maakte tussen concepten met een verschillende status binnen het kennisbestand, namelijk "referentie concepten" en "niet referentie concepten". De psychologische afstand tussen begripspaars met een verschillende status hing af van het beginpunt van de beoordeling. Gemeten vanuit het referentie concept was de door de proefpersonen ervaren afstand groter dan gemeten vanuit het niet referentie concept.

Frequentie is in het algemeen gesproken een goede maat voor gebruiksgemak. Daaruit zou men kunnen afleiden dat op getallen met een hoge frequentie ook sneller wordt gereageerd. De psychologische asymmetrie in de relatie tussen getallen doet echter bij deze verwachting vraagtekens plaatsen. Bovendien vond De Groot (1989) binnen een verzameling woorden geen correlatie tussen (taal)frequentie en reactietijd (RT). In dit hoofdstuk worden de respons frequenties van de getallen vergeleken met hun reactietijden. Voorts worden de responsen naar categorie geordend voor verschillende categorieën stimulusgroepen. Zo kunnen we nagaan of de inhoud van de associaties ondersteuning geven aan het onderscheid tussen begrippen met een zonder referentie status.

Er werden twee experimenten uitgevoerd, die slechts verschilden in de formulering van de instructie. In het eerste experiment werd de proefpersonen gevraagd om op elk stimulusgetal te reageren met het eerste getal dat hen associatie te binnenschoot. Er waren aanwijzingen dat verscheidene proefpersonen de taak zo geformuleerd erg moeilijk vonden. Daarom werd het experiment gerepliceerd met een gewijzigde instructie. Ditmaal werd de proefpersonen verzocht om "bij elk getal de meest voor de hand liggende partner te noemen". De gewijzigde instructie leidde tot een aanzienlijke vermindering van het aantal non-responsen, en tot grotere overeenstemming in de respons keus van proefpersonen. Op de hierboven besproken vragen gaven beide experimenten in principe hetzelfde antwoord. Ten eerste werd geen verband gevonden tussen RT en respons frequentie zoals vastgesteld in hoofdstuk 2. Ten tweede werd een bevestiging gevonden voor het onderscheid tussen getalsbegrippen met een verschillende psychologische status. Uit de verdeling van respons frequenties binnen de stimulus categorieën bleek dat eencijferige getallen, en in minder mate tientallen, functioneren als referentie begrippen voor andere getallen.

Hoofdstuk 4

Slechte getallen en lievelingsgetallen

In dit hoofdstuk worden twee onderzoeken gerapporteerd die beide betrekking hebben op de gevoelsmatige beoordeling van getallen. In het eerste onderzoek wordt elk der getallen 1-100 getest met behulp van de Semantisch Differentiaal. Dit door Osgood en anderen ontwikkelde instrument, dat bestaat uit een serie bi-polaire schalen van het type goed-slecht en groot-klein, dient om de betekenisstructuur van begrippen te onderzoeken. In het tweede onderzoek in dit hoofdstuk vroegen wij proefpersonen om getallen te noemen die pasten bij bepaalde begrippen: hun lievelingsgetal, een gehaat getal, een interessant getal, etcetera.

Een interessante uitkomst van het onderzoek met de Semantische Differentiaal was dat het oordeel van proefpersonen dezelfde drie dimensies kende die doorgaans gevonden worden in de beoordeling van andere begrippen, zoals politieke partijen of landen. Op de factor Evaluatie, die de grootste was, werden ronde getallen positief en grotere priemgetallen negatief beoordeeld. Een kenmerkende schaal was de goed-slecht schaal. Hierop kwamen 10, 100 en 36 als beste getallen naar voren, en 67, 53 en 43 als slechtste. Op de dimensie Potentie (groot-klein, zwaar-licht, etc), werden de getallen grosso modo naar grootte geordend. De dimensie Activiteit werd eigenlijk alleen door de schaal snel opgewonden-kalm goed vertegenwoordigd. De bekende 'bijgelovige' getallen, zoals 13, 9, 11, 7 en 3, werden alle als 'snel opgewonden' beoordeeld. Kalme getallen waren relatief groot en even.

In het tweede onderzoek vroegen wij proefpersonen om zelf getallen te noemen die volgens hen bepaalde eigenschappen vertegenwoordigden. In de eerste plaats werd geïnformeerd naar hun lievelingsgetal of, als zij dat niet hadden, het getal dat ze als kind als lievelingsgetal zouden hebben gekozen. Ook werd hen gevraagd het getal te noemen dat zij het meest van alle haatten. De overige vragen betroffen de categorieën sympathiek, onsympathiek, interessant, oninteressant, snel opgewonden en kalm.

Ongeveer de helft van de proefpersonen bleek een lievelingsgetal te hebben. De meest werd 3 genoemd, gevold door 7. Bij de proefpersonen die geen lievelingsgetal hadden en daarom moesten terugrijpen op het verleden scoorde 7 het hoogst, gevold door 8. De getallen 3 en 7 werden ook het vaakst als gehaat getal genoemd.

Bij deze beoordelingsvorm, waarin mensen de getallen niet kregen voorgeschoteld maar zelf moesten noemen of verzinnen, traden kleinere getallen zoals verwacht veel sterker op de voorgrond dan grote. De algemene frequentieverdeling vertoonde dan ook overeenkomsten met die van de associatieve responsen in hoofdstuk 2. Een belangrijk verschil was echter dat in het associatie experiment even getallen het vaakst werden genoemd, terwijl in deze taak de oneven getallen domineerden, vooral in de categorieën gehaat, onplezierig en snel opgewonden. Even getallen waren de meerderheidskeus in slechts twee van de acht categorieën, namelijk die van sympathieke en kalme getallen. Een multiple regression test bracht aan het licht dat de twee experimentele maten, associatieve frequentie en de factor Activiteit van de Semantische Differentiaal, de data in dit onderzoek het best beschrijven. Hun gezamenlijke voorspellende waarde is groter dan die van een combinatie van de

objectieve attributen grootte, evenheid en lidmaatschap van de tafels van vermenigvuldiging.

Hoofdstuk 5

Verschillen in onthoudbaarheid

In het eerste deel van dit hoofdstuk worden de getallen 1-100 getest op hun onthoudbaarheid. In het tweede deel worden de onthoud-scores van de getallen vergeleken met de in eerdere experimenten bepaalde psychologische maten. De redenering is dat onthoudbaarheid wijst op bekendheid. Onbekende begrippen worden gemakkelijk verward. Bekende begrippen worden beter uit elkaar gehouden, en kunnen daardoor ook betrouwbaarder worden gereproduceerd. Precies onderscheiden en goed onthouden is een kenmerk van expertise op elk terrein. Door getallen te ordenen naar hun onthoudbaarheid wordt dus informatie verkregen over de relatieve kwaliteit van hun representatie.

Proefpersonen kregen lijsten van twintig getallen te bestuderen. Vervolgens moesten zij de getallen die zij zich herinnerden òf opschrijven op een blanco vel, òf omcirkelen op een vel waarop alle getallen 1-100 waren afgedrukt. In deze laatste conditie werden zoveel meer goede als meer foute keuzen gemaakt als in de eerste. De relatieve onthoudbaarheid van verschillende categorieën getallen werd niet beïnvloed door het verschil in toetsingsvorm.

De scores 'correct onthouden' verschilden sterk. Het best scoorde de categorie van een-cijferige getallen. Deze getallen werden correct onthouden in gemiddeld 83 procent van alle gevallen. De groep getallen die niet voorkomt in de tafels van vermenigvuldiging scoorden het slechtst, met een gemiddelde percentage correct onthouden van 36. Andere categorieën, zoals tientallen en elftallen, namen een tussenpositie in. In een klein vervolgonderzoek werden twee groepen getallen vergeleken die in de test met de Semantische Differentiaal als 'beste' en 'slechtste' getallen naar voren waren gekomen. De lijst met de twaalf 'beste' bleek voor proefpersonen gemakkelijk te leren. De lijst met de twaalf slechtste leverde meer problemen op. Deze getallen werden relatief slecht onthouden en relatief vaak verward met andere grote oneven getallen.

Vervolgens werd een factor analyse uitgevoerd op negentien variabelen, afkomstig uit zowel de associatie experimenten beschreven in de hoofdstukken 2 en 3, als de subjectieve oordeelsmaten beschreven in hoofdstuk 4. Er werden vier goed interpreteerbare factoren gevonden, te weten frequentie, positieve appreciatie, eenduidigheid van associatieve relaties, en culturele bijbetekenis. Elk der vier factoren bleek significant bij te dragen aan de voorspelling van onthoudbaarheid.

Hoofdstuk 6

Getalsgrootte en rekenen

In dit hoofdstuk wordt de invloed van getalsgrootte op rekengemak nader onder de loupe genomen. Sommen met grotere getallen zijn doorgaans moeilijker, wat blijkt uit langere reactietijden en een groter aantal fouten. In dit onderzoek werd nagegaan in welke mate elk van de drie getallen in een aftreksom verantwoordelijkheid draagt voor dit effect. Dit gebeurde door groepen sommen te vergelijken die telkens in slechts een opzicht verschilden. Het eerste contrast dat werd aangebracht was tussen sommen met grote en kleine antwoord-getallen, zoals $72 - 9$ en $72 - 63$. Het tweede contrast was tussen sommen met grote en kleinere begin-getallen, zoals $72 - 9$ en $32 - 9$, beide ook in de hierboven beschreven variant. Het derde contrast was tussen sommen waarvan het kleinste getal in grootte verschilde, zoals $72 - 9$, $72 - 6$, en $72 - 3$, waarbij ook antwoord-grootte en grootte van het eerste getal systematisch werd gevarieerd. Het vierde contrast was 'lenen'. De helft van de sommen in elk der categorieën bestond leensommen.

Lenen bleek de grootste moeilijkheidsfactor te zijn. De responstijd (RT) van leensommen was gemiddeld 836 milliseconden, terwijl voor niet-leensommen een gemiddelde RT van 352 milliseconden werd geregistreerd. De factor lenen had ook een sterke invloed op het aantal fouten.

Ook de grootte van het kleinste getal had een significante invloed op de reactietijden en het aantal fouten. Dat effect doet zich alleen voor binnen de groep van leensommen, maar is daar dan ook heel sterk. Leen-sommen met 1, 2 of 3 als kleinste getal kostten gemiddeld 493 milliseconden, die met 4, 5 of 6 als kleinste getal 841 milliseconden en die met 7,8 of 9 als kleinste getal 1174 milliseconden. De respectieve foutenpercentages waren 4, 9 en 11.

De grootte van het begingetal blijkt van minder sterke invloed dan de grootte van het kleinste getal, hoewel er bij de leensommen een duidelijk effect te vinden is. Dat beperkt zich echter tot de RTs. De grootte van het antwoord getal had geen enkele invloed op de moeilijkheid van de sommen.

Door middel van multiple regressie werden vervolgens effecten vergeleken van getalsgrootte en getalsfrequentie. Het bleek dat de frequentie van het begingetal een sterkere invloed heeft op de moeilijkheid van sommen dan de grootte van het begingetal. Voor het kleinste getal geldt het omgekeerde. Hier is grootte een betere voorspeller dan frequentie. Uit deze uitkomsten blijkt dat verwerkingsgemak van getalsinformatie door meerdere factoren wordt bepaald.

Hoofdstuk 7

Tot slot

In dit hoofdstuk wordt besproken wat het geheel van bevindingen zegt over de representatie van getalskennis in het menselijk geheugen. Daarbij wordt vooral ingegaan op de betekenis van de verschillende maten. Sommige van de gevonden effecten kunnen worden verklaard door de eigenschappen van de getallen zelf. Zo is het niet verwonderlijk dat 12 en 50 meer associaties opleveren dan 13 en 67 gegeven het feit dat proefpersonen een voorkeur blijken te hebben voor delers als associaties. Onder de associatie-arme stimuli bevinden zich echter ook getallen met delers. Dikwijls zijn dat grotere getallen, zoals 76, en 87. Kennelijk worden de eigenschappen en relaties van zulke onvoldoende goed gekend om in een associatietask geactiveerd te worden.

Dat brengt ons op de factor 'grootte', die in veel theorieën over getalsverwerking en getalsrepresentatie een centrale plaats inneemt. Dat grootte een goede voorspeller is van de kwaliteit en de beschikbaarheid van kennis over een getal blijkt ook uit dit proefschrift. Het discussiepunt is echter hoe deze factor 'grootte' geacht kan worden te zijn gerepresenteerd. De conclusie van dit proefschrift is dat grootte niet rechtstreeks wordt gerepresenteerd in het getalsconcept. Effecten van getalsgrootte zijn eerder gevolg van de ontoereikendheid hun onmiddellijke representatie. Wat groot is aan een concept als 87 is de moeite die het kost om het adequaat te representeren. Dat dit moeite kost komt doordat we het niet vaak gebruiken. Dat we het niet vaak gebruiken komt mede door zijn grootte. Het verband tussen getalsgrootte en zijn psychologische effecten is dus indirect.

Een andere belangrijke conclusie is dat de factor frequentie verwezen is met de inhoud van onze kennis van getallen. Frequente getallen worden vaker dan infrequente gebruikt voor de vorming van een gedachte. Ze hebben een meer uitgesproken identiteit en worden beter onthouden dan grotere getallen.

Psychologische frequentie zoals vastgesteld in een continue associatietask blijkt sterk gecorreleerd te zijn met algemene taalfrequentie. De relatie tussen beide is waarschijnlijk als die tussen de kip en het ei. Taalfrequenties vormen ons, en worden door ons gereproduceerd. Hun overeenkomst komt voort uit de constanten van het menselijk bestaan. Het verschil tussen beide maten is dat associatieve frequentie rechtstreeks verwijst naar de psychologische organisatie van individuen. Het is daardoor een psychologisch doorzichtiger maat dan algemene taalfrequentie.